Optimale Strategie für das Würfelspiel Zehntausend

David Peter

30. Oktober 2013

Um eine optimale Strategie für Zehntausend zu entwickeln, führen wir die Funktion $E(p, n)$ ein, die den Erwartungswert an Punkten bei Spielen einer optimalen Strategie angibt, unter der Voraussetzung, dass der Spieler bereits p Punkte besitzt und mit n Würfeln weiterwürfelt[1]. Weiterhin führen wir die Wertungsfunktion $W(w)$ ein, die das Maximum an verwertbaren Punkten in der Menge $w = \{w_1, w_2, \dots\}$ angibt. Beispielsweise ist $W(\{1, 1, 1, 1, 5, 3\}) = 2050$.
Vollständige Kenntnis der Funktionswerte $E(p, n)$ für beliebige p und n erlaubt es einem Spieler die optimale Strategie zu verfolgen[2]. Um das einzusehen, diskutieren wir die beiden einzig möglichen Entscheidungssituationen. In Situation (1) hat der Spieler bereits p Punkte und noch alle 6 Würfel zur Verfügung[3]. Er muss jetzt entscheiden, ob er weiterwürfelt. Hierzu muss lediglich p mit $E(p, 6)$ verglichen werden.
In allen anderen Entscheidungs-Situationen (2) kann der Spielzustand beschrieben werden durch eine Punktzahl p und eine Menge von aktuell geworfenen Würfeln w. Typische Spielsituationen sind beispielsweise

$$p = 100, \qquad w = \{1, 1, 2, 3, 5\} \tag{1}$$
$$p = 250, \qquad w = \{5, 6\} \tag{2}$$
$$p = 2000, \qquad w = \{1, 2, 3, 4, 6, 6\} \tag{3}$$

Der Spieler hat in dieser Situation zwei Möglichkeiten: (2a) Er schreibt und bekommt damit $p + W(w)$ Punkte. (2b) Er legt eine Menge $u \in V(w)$ an Würfeln

[1] Wichtig hierbei ist, dass die Entscheidung weiterzuwürfeln bereits getroffen wurde.

[2] Wir beschränken uns auf Situationen, in denen es lediglich darum geht den Erwartungswert pro Zug zu maximieren. Das schliesst eventuelle Situationen am Anfang des Spiels (Mindestwurf) sowie das Spielende („Interaktion" mit Gegnern) aus. Die Punkte p beziehen sich immer auf die bereits in diesem Zug gewonnenen Punkte, nicht um den Gesamtpunktestand.

[3] Das heisst, zu Beginn des Zuges ($p = 0$) oder nachdem alle Würfel wieder reingelegt wurden.

heraus, und würfelt mit $n_w - n_u$ Würfeln weiter. Hierbei bezeichnet $V(w)$ die Menge der verwertbaren Untermengen von w und $n_w = |w|$ die Anzahl der Würfel in einer Menge.
An dieser Stelle tritt eine kleine Komplikation auf, da zwei Fünfer auch als Eins herrausgelegt werden dürfen. Dies kann in der Funktion $V(w)$ berücksichtigt werden, indem zwei Möglichkeiten generiert werden[4]. Es ist also beispielsweise

$$\begin{aligned} V(\{2,2,2,5,5\}) = \big\{&\{2,2,2\},\{2,2,2,5\},\{2,2,2,1^*\},\\ &\{2,2,2,5,5\},\{5\},\{1^*\},\{5,5\}\big\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Hierbei sind die in Einser umgewandelten Fünferpaare speziell gekennzeichnet, da sonst $V(\{1,1,5,5\})$ die Kombination $\{1,1,1\}$ mit 1000 Punkten enthalten würde.
Der Erwartungswert an Punkten, der aus Entscheidung (2b) hervorgeht lässt sich nun mithilfe der Funktion $E(p,n)$ angeben als

$$E_{2\mathrm{b}}(p,w,u) \equiv E(p + W(u), n_w - n_u). \tag{5}$$

Hierbei ist zu beachten, dass $n_w - n_u = 0$ sein kann. Dieser Fall wird später getrennt behandelt. Der optimale Spielzug in Situation (2) findet sich also durch Berechnen der Erwartungswerte für alle möglichen Mengen $u \in V(w)$ und dem Vergleichen des Maximums mit dem Ergebnis aus (a). Formal können wir den Erwartungswert in Spielsituation (2) also angeben als[5]

$$E_2(p,w) \equiv \max\big\{p + W(w), \max_{u\in V(w)} E_{2\mathrm{b}}(p,w,u)\big\}. \tag{6}$$

Mit diesen Überlegungen können wir jetzt eine Definition von $E(p,n)$ geben. Sei $\mathcal{W}_n$ die Menge aller möglichen Würfelergebnisse beim Würfeln mit n Würfeln und $\mathcal{P}_w$ die Wahrscheinlichkeit das Ergebnis w zu erhalten, dann ist

$$E(p,n) = \begin{cases} E(p,6), & n = 0, p < M(p) \\ p, & n = 0, p \geq M(p) \\ \sum_{w\in V(\mathcal{W}_n)} \mathcal{P}_w\, E_2(p,w), & \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

Hierbei haben wir die anfänglich gegebene Definition von $E(p,n)$ ausgedehnt auf den Fall, in dem $n = 0$ ist. Dies erlaubt uns den obig angegebenen Fall (1) abzuhandeln. Dabei vergleichen wir p mit einer oberen Schranke $M(p)$. Die zuvor beschriebene Verfahrensweise in Situation (1) führt uns zu der Selbstkonsistenzbedingung $M(p) = E(p,6)$. Versuchen wir jedoch, diese Bedingung in der

[4]Es kann auch sinnvoll sein, beide Fünfer herauszulegen, wenn es sich beispielsweise um die letzten beiden Würfel handelt.

[5]Diese Spielsituation entspricht keinem Funktionswert von $E(p,n)$, da hier noch nicht entschieden wurde, ob weitergewürfelt wird, oder nicht.

Definition von $E(p,n)$ einzusetzen, führt das zu einer Endlosrekursion, da $E(p,6)$ selbst über E_2 auch von $M(p)$ abhängt.
Um $M(p)$ dennoch selbstkonsistent bestimmen zu können, gehen wir wie folgt vor. Für sehr große p muss $E(p,n) < p$ sein, denn es besteht immer die Möglichkeit alles zu verlieren. Für sehr kleine p hingegen ist offensichtlich $E(p,n) > p$. Weiterhin gilt,

$$E(p+\Delta p, n) < E(p,n) + \Delta p, \tag{8}$$

denn auf der rechten Seite sind die Überschuss-Punkte $\Delta p > 0$ schon „sicher". Daraus folgt aber, dass $E(p,n)$ für alle p langsamer wächst als p, denn

$$\frac{E(p+\Delta p, n) - E(p,n)}{\Delta p} < 1. \tag{9}$$

Damit gibt es also für alle n einen Punkt, an dem $E(p,n) = p$ ist. Speziell für $n = 6$ definieren wir den Punkt p_6 als die Stelle, an der $E(p_6,6) = p_6$ ist. Aufgrund der Monotonie von $E(p,n)$ können wir dann die Definition wesentlich vereinfachen:

$$E(p,n) = \begin{cases} E(p,6), & n = 0, p < p_6 \\ p, & n = 0, p \geq p_6 \\ \sum_{w \in V(\mathcal{W}_n)} \mathcal{P}_w \, E_2(p,w), & \text{sonst} \end{cases} \tag{10}$$

Der Wert p_6 kann als Vielfaches von 50 Punkten angegeben werden, da dann alle $p \in (p_6 - 50, p_6]$ äquivalent sind. Um p_6 zu berechnen, verwenden wir die Selbstkonsistenzbedingung. Wir können $E(p_6,6)$ exakt berechnen, da bekannt ist, dass in jedem Fall nur noch ein Wurf stattfindet. Danach ist die Punktzahl entweder 0 oder größer als p_6, und damit wird nicht weiter gewürfelt. Es ist

$$p_6 = E(p_6,6) = \left(1 - \mathcal{P}_6^0\right) p_6 + \Delta_6 \tag{11}$$

Hierbei ist $\mathcal{P}_6^0$ die Wahrscheinlichkeit mit sechs Würfeln 0 Punkte zu erreichen und Δ_6 der Punkte-Erwartungswert bei einmaligem Würfeln mit 6 Würfeln. Beide Größen können exakt berechnet werden und es ergibt sich[6]

$$p_6 = \frac{\Delta_6}{\mathcal{P}_6^0} = \frac{237875/648}{5/162} = \frac{47575}{4} \approx 11894 \tag{12}$$

Das heisst, wir können $p_6 = 11900$ setzen. Damit ist jetzt die Berechnung aller Werte $E(p,n)$ möglich.

[6] Alternativ kann p_6 in der Definition so lange erhöht werden, bis sich $E(0,6)$ nicht mehr vergrößert. Auch diese Methode führt zu $p_6 = 11900$.

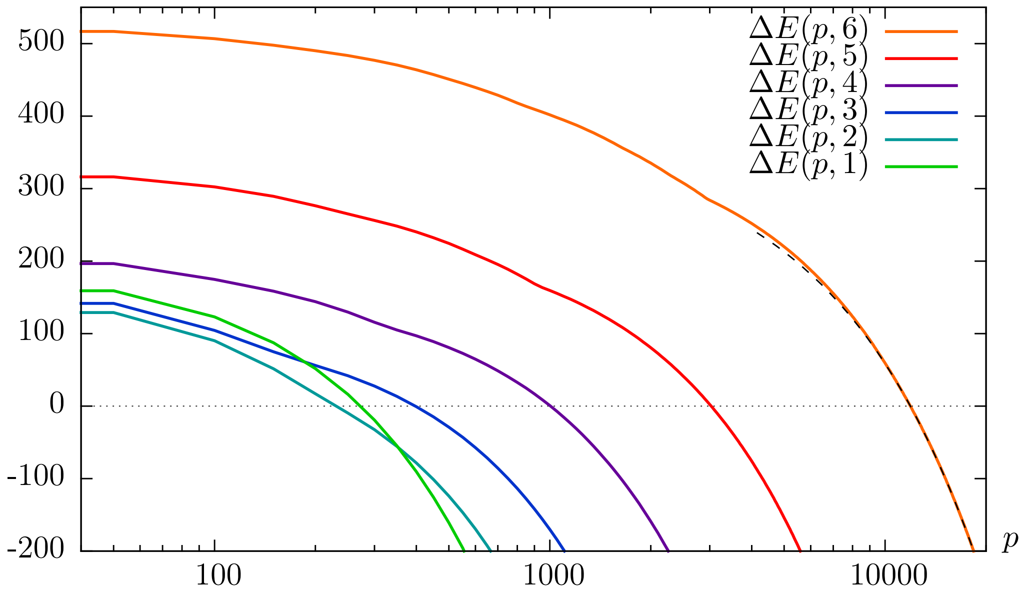

Abbildung 1: Verlauf der Funktion $\Delta E(p,n)$, dem erwarteten Punktezuwachs bei Weiterspielen mit n Würfeln, wenn bereits p Punkte erreicht sind. Die Funktion $\Delta E(p,1)$ hat Kreuzungspunkte mit den $n=2$ bzw $n=3$ Linien, da es für sehr kleine Punktzahlen besser ist, nur einen Würfel zu besitzen (Chance auf Full-House). Das asymptotische Verhalten $E(p,n)=(1-\mathcal{P}_n^0)p+\Delta_n$ für $p\to\infty$ ist für den Fall $n=6$ durch die gestrichelte Linie gezeigt.

Das wichtigste Ergebnis ist der Punkte-Erwartungswert pro Zug[7]. Es ist

$$E(0,6)\approx 527,2 \tag{13}$$

Für die weitere Analyse definieren wir die Funktion

$$\Delta E(p,n)=E(p,n)-p \tag{14}$$

die uns den Punkt*zuwachs* beim Würfeln mit n Würfeln angibt. Aufgrund vorausgehender Überlegungen ist bekannt, dass $\Delta E(p,n)$ monoton fallend ist und einen Nulldurchgang für jedes n besitzt. Analog zu obiger Argumentation definieren wir p_n als die Nullstellen von $\Delta E(p,n)$:

$$\Delta E(p_n,n)=0. \tag{15}$$

Diese Nullstellen sind für das Spielen interessant, da es nur dann sinnvoll ist, mit n Würfeln weiterzuspielen, wenn die eigene Punktzahl $p<p_n$ ist. Es findet sich (auf 50 Punkte gerundet, so dass p echt kleiner als p_n sein muss)

$$p_1=300,\quad p_2=250,\quad p_3=400,\quad p_4=1050,\quad p_5=3050,\quad p_6=11900 \tag{16}$$

[7] Alle Werte $E(p,n)$ könnten prinzipiell als Bruch exakt angegeben werden, da keinerlei Näherungen gemacht wurden.

Interessanterweise ist p_1 größer als p_2, da man bereits näher an der Situation ist, in der alle Würfel wieder verwendet werden können. Dennoch ist es nur in einem einzigen Extremfall sinnvoll, mit einem bzw. zwei Würfeln weiterzuspielen. Nämlich nur dann, wenn zuvor nacheinander vier bzw. fünf Fünfen herausgelegt wurden. Mit drei Würfeln wird hingegen (im ersten Durchgang) immer weitergespielt, es sei denn die erste Kombination war $444, 555, 666$ oder 111. Mit fünf oder sechs Würfeln wird nahezu immer weitergespielt.
Der gesamte Verlauf der Funktion $E(p, n)$ ist für alle (sinnvollen) Parameter in Abbildung 1 gezeigt (logarithmische p-Skala).